

# *Matematikken i vejr- og klimaforskning*

Konference for matematiklærere

Høje Tåstrup Gymnasium, 4/10 2023

# Klima- og geofysik

Forstå, beskrive, måle og modellere processer ved hjælp af:

- Fysik,
- Matematik
- Bio-geo-kemi
- ”Teknik”, inklusive måske endnu ikke helt forståede teknikker fra bl.a. AI og ganske ny kvantecomputing/matematik. Men især satellit - teknologi og nye instrumenter til brug for jordobservation.

Nøgleord:

Interdisciplinært,

Makroskala forståelse,

Holistisk angrebsvinkel

Hard science med masser af vidunderlig matematik

# De grundlæggende fysiske love, der styrer den atmosfæriske verden:

## Newton's anden lov:

Kraft er lig masse gange acceleration – eller omvendt: Acceleration er lig med kraft per masse-enhed.

Denne lov gælder selvfølgelig også for atmosfærisk luft, og her er det især trykforskelle og tyngdekraften der udgør de reelle fysiske kræfter. Dertil kommer ”fiktive” kræfter, når vi ser systemet fra vores accelererede jordsystem.

**OBS:** Acceleration er det samme som vindens ( $\mathbf{U}$ ) ændring med tiden.

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r$$

# De grundlæggende fysiske love, der styrer den atmosfæriske verden:

## Termodynamikkens første hovedsætning

Hvis man tilfører varme til en mængde luft, betyder dette, at temperaturen (den "indre energi") for luften stiger, og/eller at luften udfører arbejde på omgivelserne (dvs. skubber luften rundt omkring væk).

Opvarmningen kan typisk være fra solstråling eller infrarød stråling, samt fra kondensation af vanddamp på skydråber eller iskrystaller

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = J \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\rho}$$

# De grundlæggende fysiske love, der styrer den atmosfæriske verden:

## Massebevarelse (kontinuitetsligninger)

Mængden af tør luft ("d") ændres ikke (bortset fra små ændringer i fx CO<sub>2</sub>). Men luften kan selvfølgelig godt presses sammen.

Modsat tør luft kan mængden af vanddamp ændre sig voldsomt, hvis der sker kondensation af vanddamp på skydråber eller iskrystaller.

Mængden af andre gasser ("i") kan typisk ændres via kemiske processer.

$$\frac{D\rho_d}{Dt} = -\rho_d \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad \rho = \rho_d + \sum_i \rho_i$$
$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \nabla \cdot \mathbf{U} + s_i$$

Navier-Stokes ligning

$$\frac{DU}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r$$

1. hovedsætning

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = J \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\rho}$$

Kontinuitetsligning (tør)

$$\frac{D\rho_d}{Dt} = -\rho_d \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad \rho = \rho_d + \sum_i \rho_i$$

Andre kontinuitetsligninger

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \nabla \cdot \mathbf{U} + s_i$$

Tilstandsligning for 1 kg luft

$$p = \rho RT$$

# De grundlæggende fysiske love, der styrer den dynamiske atmosfæriske verden:

I alt er der 8 – 9 såkaldte koblede partielle ikke-lineære differential-ligninger, der beskriver disse grundlæggende love. Men hvis man også inkluderer ”tracers”, f.eks. partikler og drivhusgasser (ud over H<sub>2</sub>O) kommer man let over 100 ligninger. Og det gøres faktisk i f.eks. CAMS

Ligningerne kan løses/integreres numerisk, dvs. approksimativt med en ”passende” computer ved hånden.

For at gøre det, må man inddele hele Jordens atmosfære (og faktisk nu også oceanerne i et gitternet), hvor man kender de grundlæggende variable.





HA

*Vilhelm Bjerknes*  
Norwegian meteorologist

www.norwegian.com



# Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik.

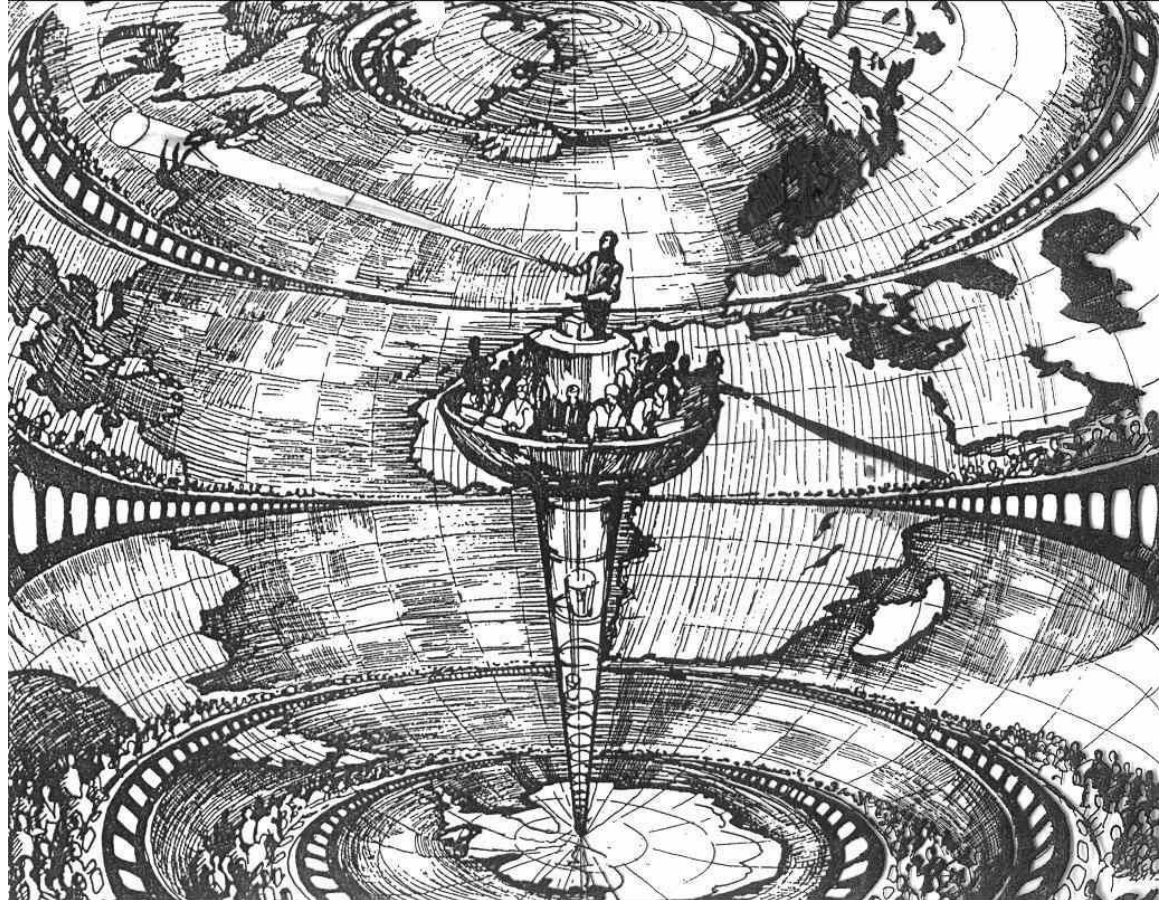
Von V. BJERKNES, Universität Stockholm.

Wenn es sich so verhält, wie jeder naturwissenschaftlich denkende Mann glaubt, daß sich die späteren atmosphärischen Zustände gesetzmäßig aus den vorhergehenden entwickeln, so erkennt man, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine rationelle Lösung des Prognoseproblems der Meteorologie die folgenden sind:

1. Man muß mit hinreichender Genauigkeit den Zustand der Atmosphäre zu einer gewissen Zeit kennen.
2. Man muß mit hinreichender Genauigkeit die Gesetze kennen, nach den sich der eine atmosphärische Zustand aus dem anderen entwickelt.

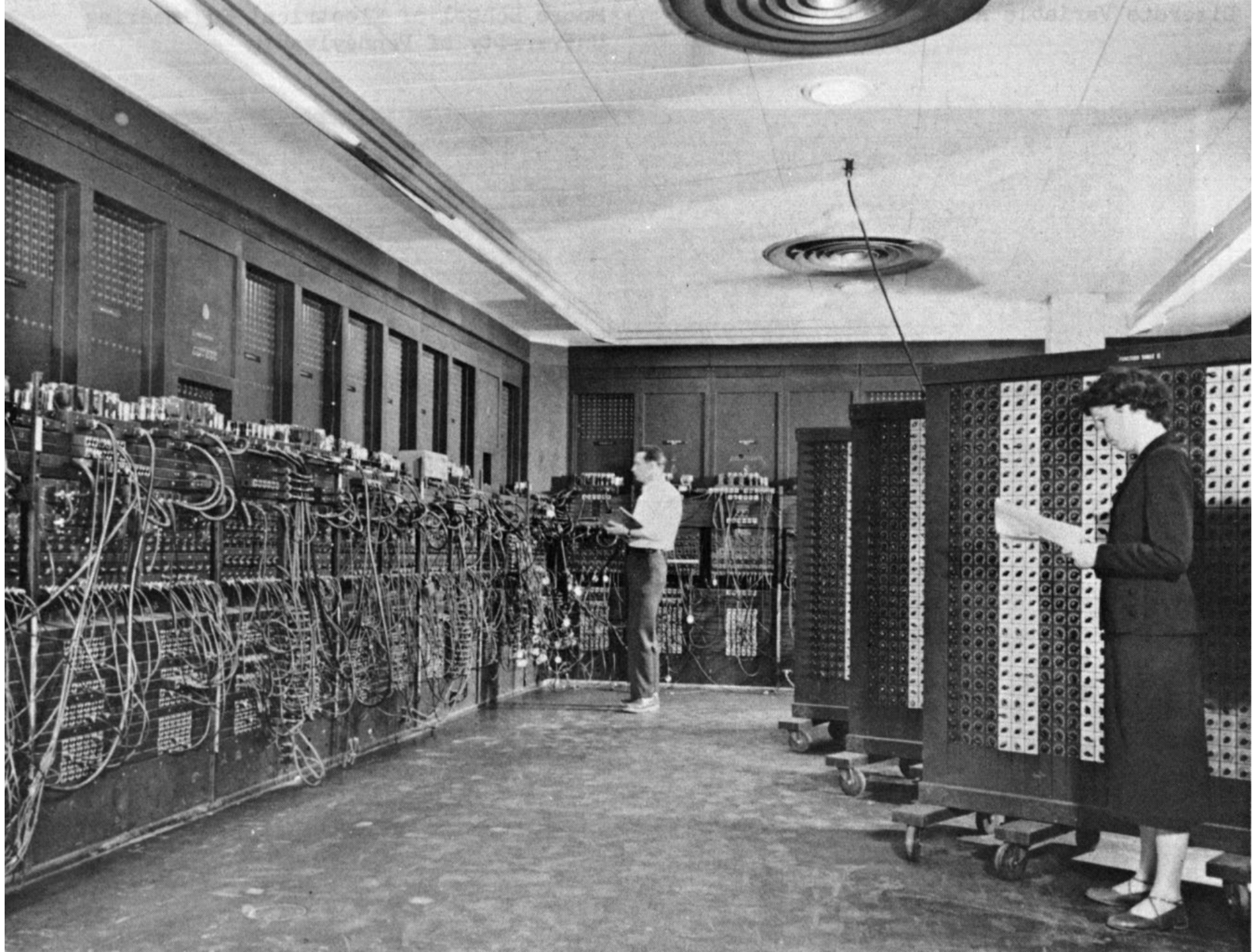
Allerede i 1904 formulerede den norske meteorolog Vilhelm Bjerknes (1862-1951) de grundlæggende ingredienser, der skal til for lave en såkaldt numerisk vejrforudsigelser – og, har det vist sig, også simulere klimaet og klimaændringer

Citatet er fra Meteorologische Zeitschrift, januar 1904.



Lewis Fry Richardson (1881 - 1953) var den første meteorolog, der gennemregne en såkaldt numerisk vejrprognose. Han begik nogle enkelte fejltrin, som vi har løst i dag. Men han var ekstremt visionær.







**ENIAC var den første programmerbare elektroniske computer til forsøgsprognoser i 1949. Den havde**

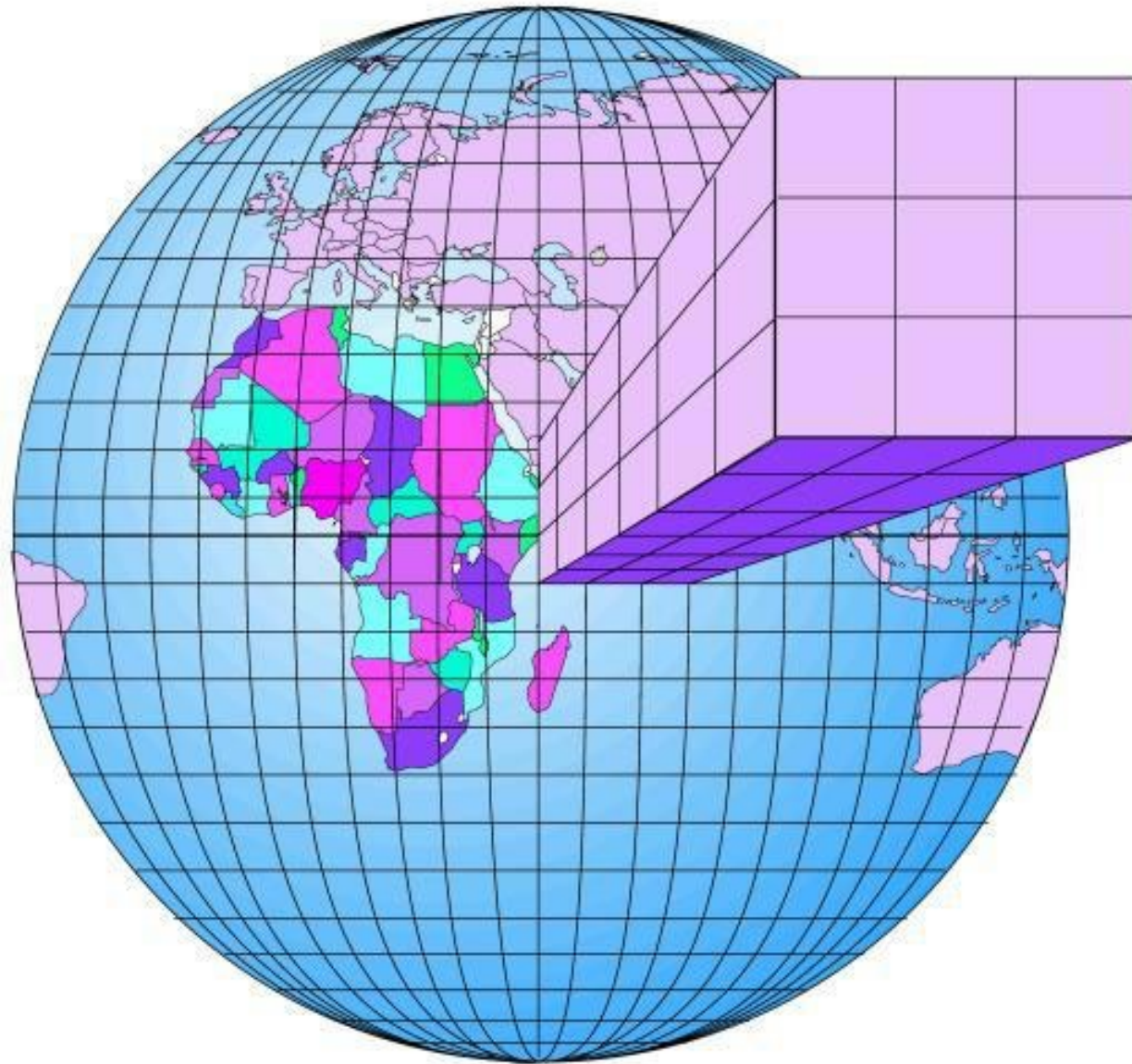
18,000 radorør

70,000 resistorer

10,000 kapacitorer

6,000 switches

Energiforbrug: 140 kW



# Verdens førende globale vejrmodel: IFS / ECMWF

Antal vertikal lag: **137**

Antal horisontale gitterpunkter: ca. **6.500.000**

Antal prognose-variable: **8 / 9**

$u$  (vindkomponent mod øst)

$v$  (vindkomponent mod nord)

( $w$  (vindkomponent opad))

$T$  (temperatur)

$\rho$  densiteten af luft

$\rho_v$  massefylde af vanddamp pr  $m^3$  luft

$\rho_l$  massefylde af skyvand (dvs. massen af flydende vand pr  $m^3$  luft)

$\rho_i$  massefylde af skyis (dvs. massen af is pr  $m^3$  luft)

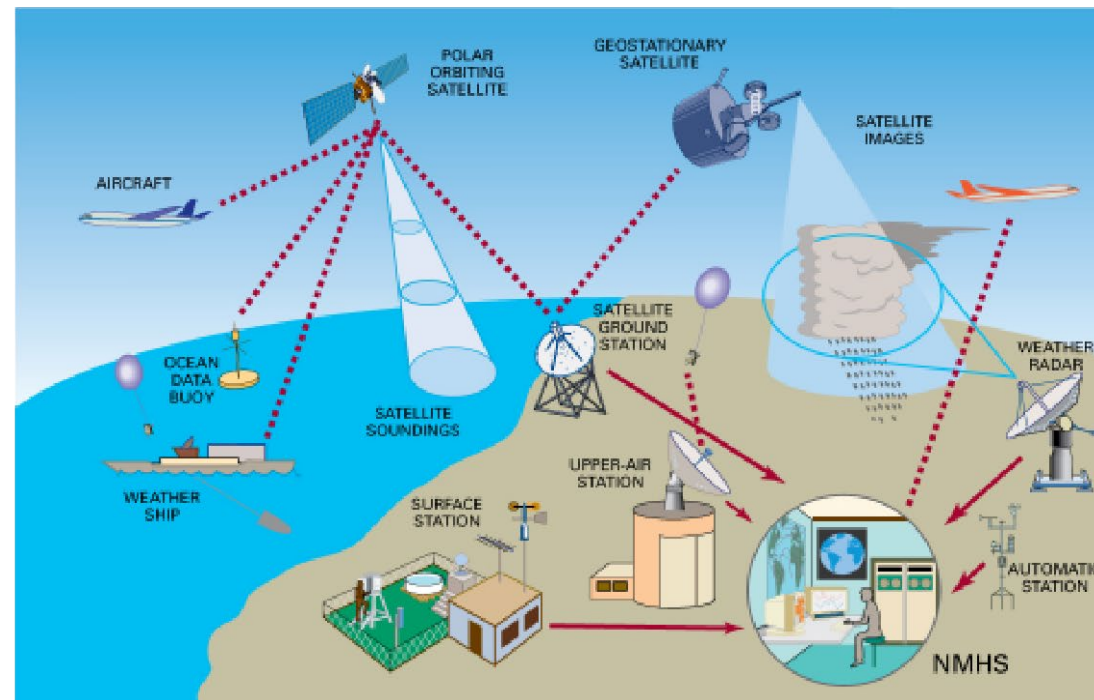
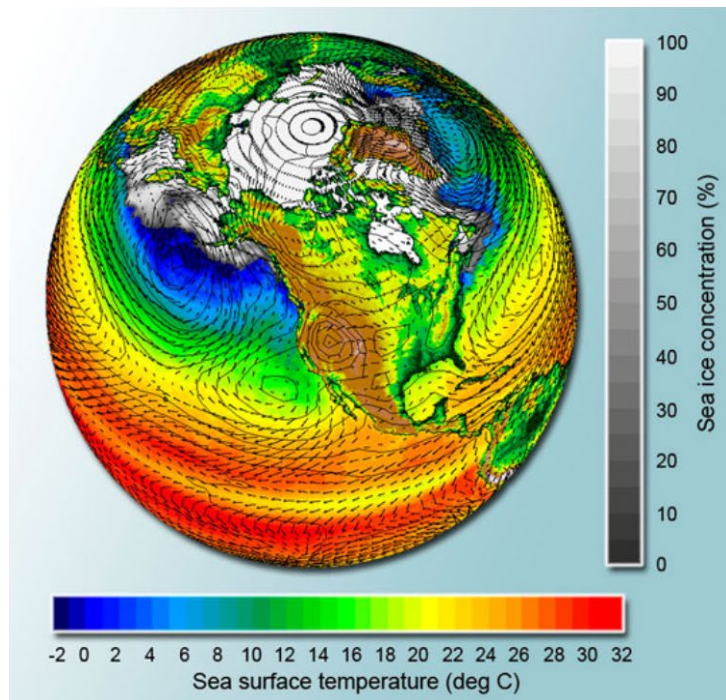
$[O_3]$  koncentration af ozon

Totalt antal variable  $137 \times 6.500.000 \times 9 \approx 8$  milliarder

8 byte til hver variabel

Dette fylder alene 64 Gbyte (men RAM-forbruget er langt større).





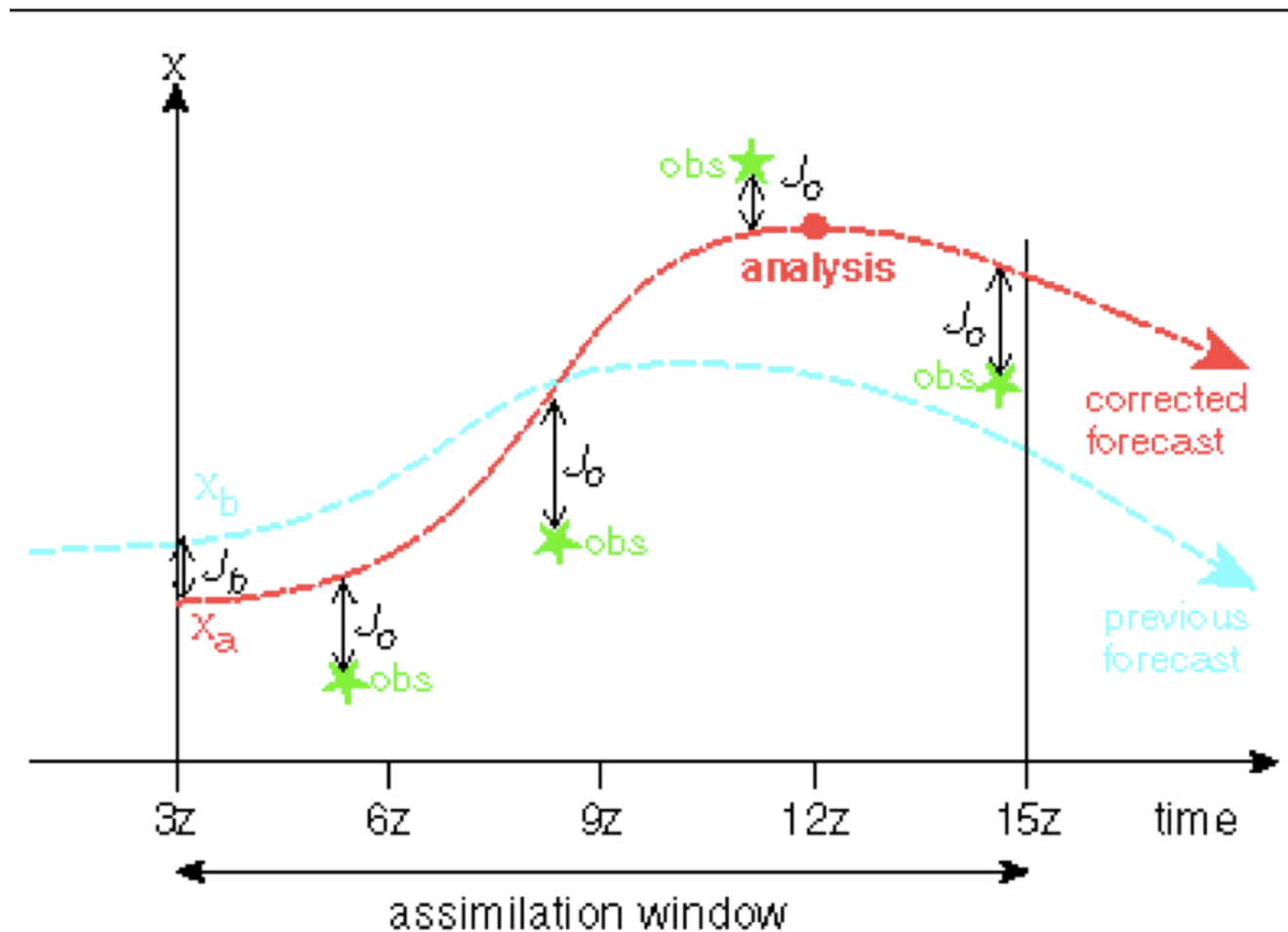
## Vi skal kende en begyndelsesbetingelse for at lave en vejrudsigt!

Ingredienserne vi har til rådighed er:

- et supergodt gæt på tilstanden fra den foregående prognose (kun få timer gammel)
- 50 – 100 millioner ofte meget fejlbehæftede observationer af alle mulige mærkelige typer til forskellige tider omkring det tidspunkt, vi gerne vil begynde at regne fra.

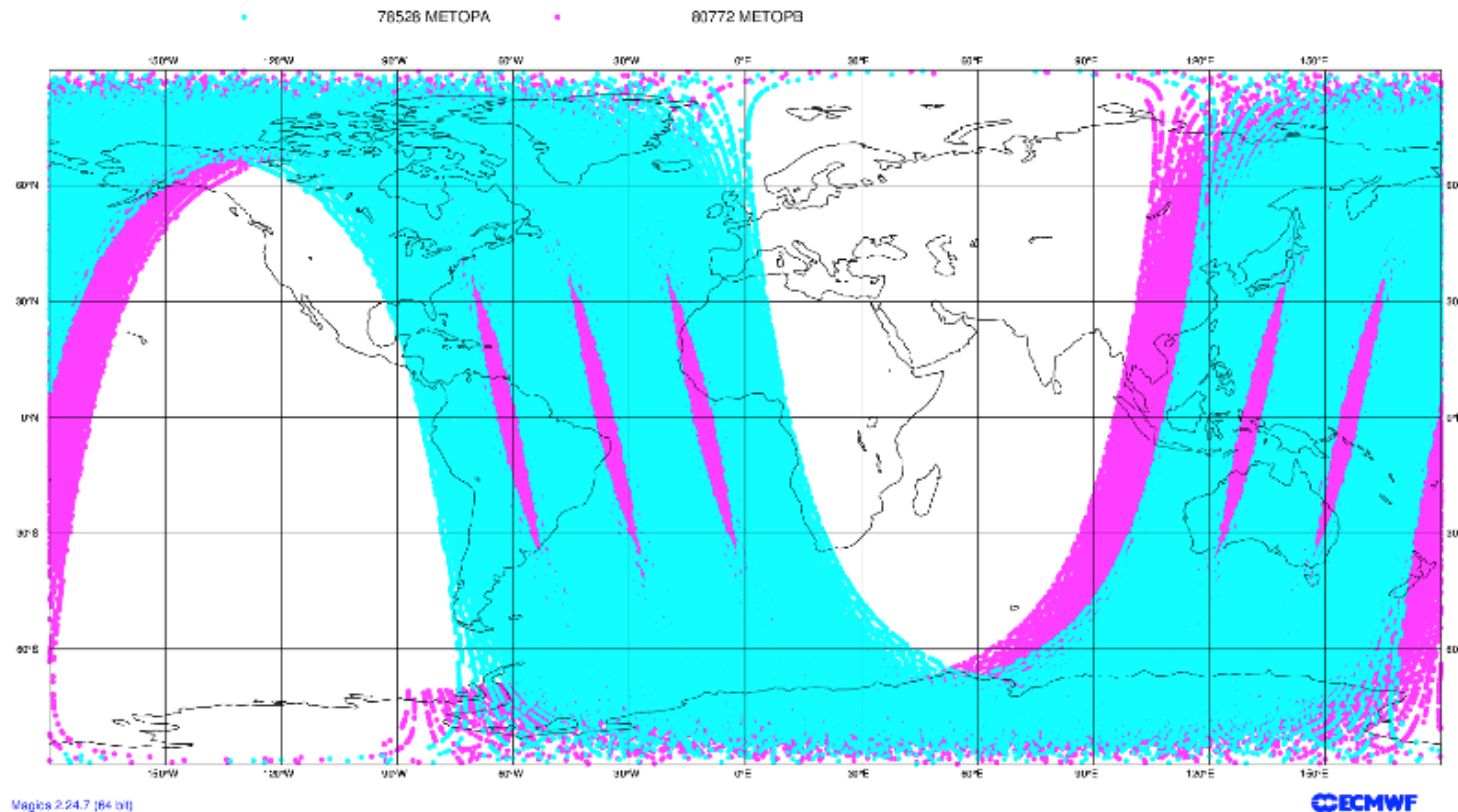
## Data assimilering

– en vidunderlig kombination af avanceret matematik, fysik, numeriske algoritmer og computerteknologi.



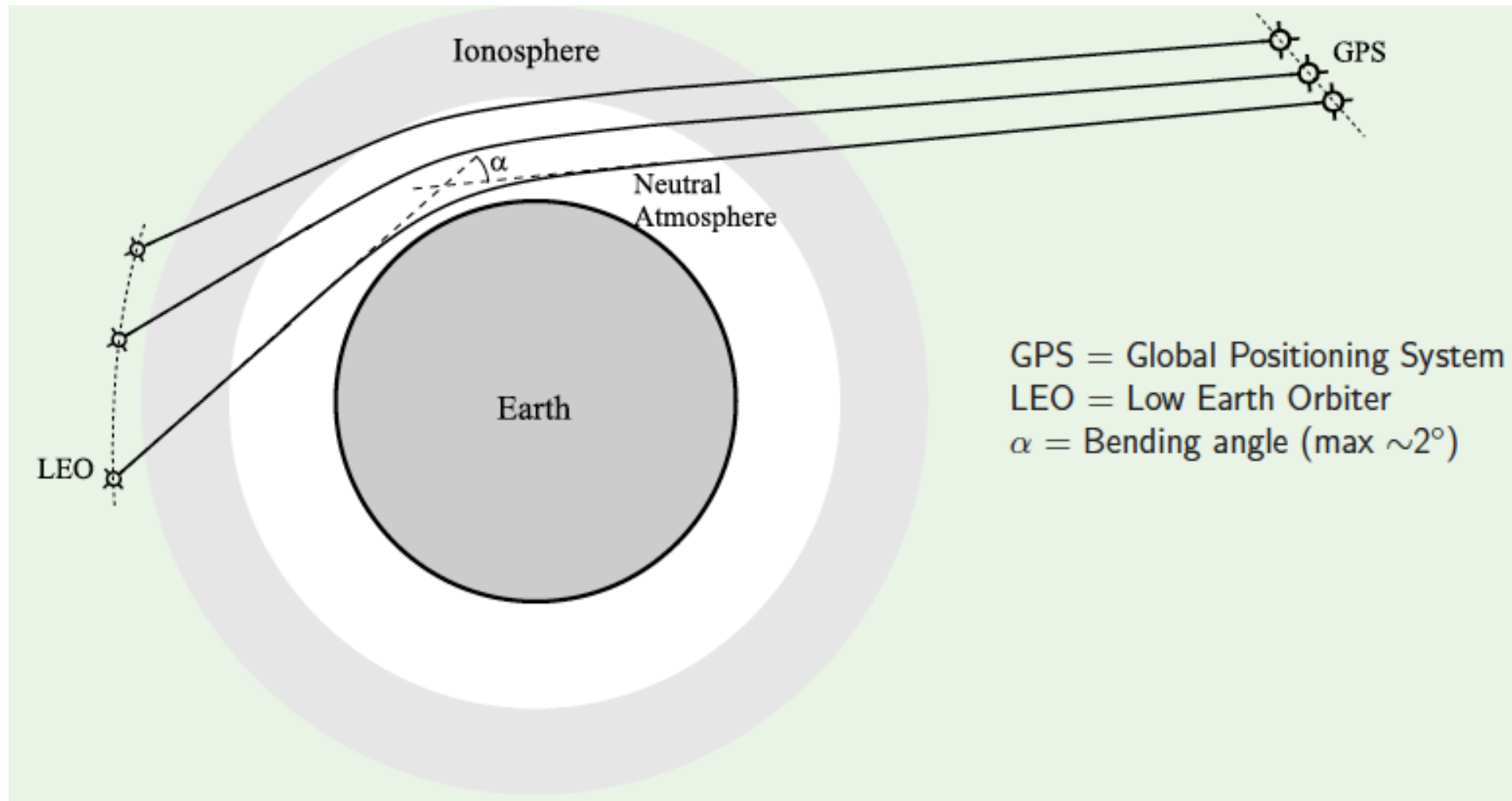
# IASI<sup>1)</sup> på ESA's Metop: et af de mest avancerede instrumenter til overvågning af atmosfærens og overfladens fysiske og kemiske tilstand.

ECMWF Data Coverage (All obs DA) - IASI  
03/Mar/2016; 00 UTC  
Total number of obs = 159300



1) IASI: Infrared Atmospheric Sounding Interferometer. It has 8461 spectral channels (although the real spectral resolution is lower)

**GPS radio-okkultation – en nyere teknologi med betydelig positiv "impact" på vejrprognosekvaliteten. Måling af tidsforsinkelsen i et GNSS-signal (fx GPS) fra en lavtgående satellit (LEO)**



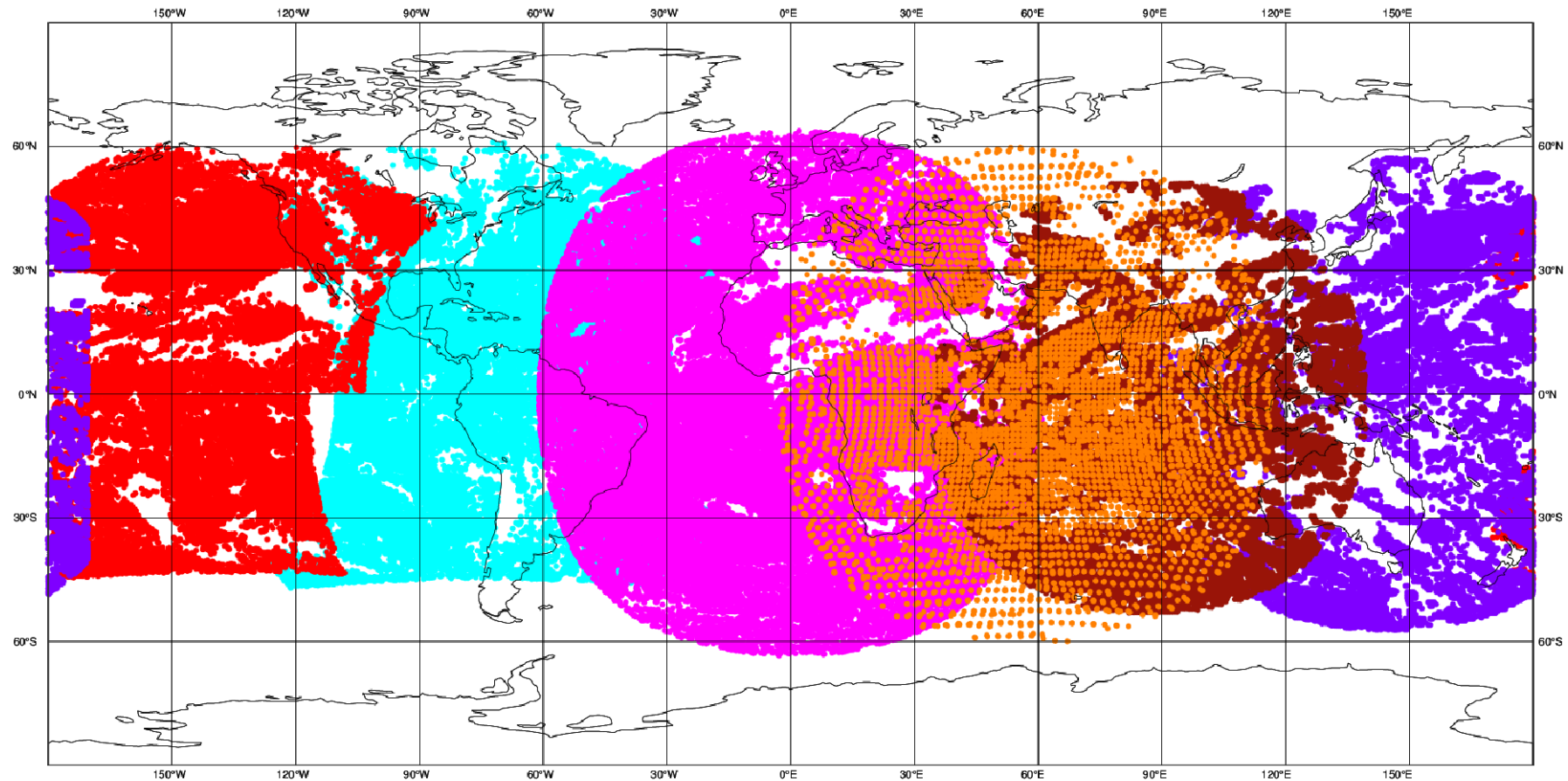
# Hidtil kun estimater af vind i få niveauer ud fra bevægelser af skyer og partikler

ECMWF Data Coverage (All obs DA) - AMV IR

03/Mar/2016; 00 UTC

Total number of obs = 298451

• 57670 Goes15 • 113033 Goes13 • 65668 Met10 • 0 Mtsat-1R • 33209 Mtsat2 • 0 FY-2D • 22627 FY-2E • 6244 Met7 • 0 Goes14





## 3-D måling af vinden er det sidste, vi sådan rigtig mangler

ESA's Aeolus mission. Satellitten blev opsendt 23/8 2018 og måler vinden i de nederste 30 km af atmosfæren ved hjælp af ultraviolet laser Doppler teknologi





# Konklusion

Både vejr- og klimaforskning – OG DET VIL PRIMÆRT SIGE FORSTÅELSE – har været i en ”stille” revolution, som for alvor har taget fart gennem de seneste ca. 100 år.

Der har historisk set – dog med få undtagelser – ikke været den der ”ene ting”, som har revolutioneret alt. I hvert fald ikke frem til nu, hvor AI, måske kombineret med kvante-computing, bliver netop det.

Dvs.: Vi er simpelthen gradvist blevet dygtigere og dygtigere til at forstå systemet, måle det, og modellere/simulere det via matematisk/fysisk baserede modeller .

Da vejr- og klimaforskning, samt praktisk anvendelse af denne forskning, har enorm indflydelse, også økonomisk, vil det være et område, som er superrelevant for kommende studerende at gå ind i.

Men disse studerende skal – af især gymnasielærere – blive skubbet (”nudget”) til brænde for at forstå avanceret matematik, teknologi/fysik, computer-teknologi, ”and you name it!”.

Der er masser af virksomheder og institutioner i hele verden, som efterspørger denne kompetence. Stort set alle mine ”gamle” studerende har nu helt fantastiske jobs – også internationalt på allerhøjeste niveau – som de er både meget vilde med og stolte af